SESSION 1992

Mathématiques Problème

(Options T et TA)

Durée : 4 heures

Les candidats sont invités à donner de leurs affirmations des justifications complètes, mais brèves.

Les parties III et IV peuvent être traitées indépendamment des parties I et II.

On désigne par $\mathcal{M}$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On note 0 la matrice nulle, I la matrice unité.

On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^3$ avec la matrice colonne de ses composantes dans la base canonique.

Une suite (M_n) d'éléments de $\mathcal{M}$, $M_n = (m_{ij}(n))$ a une limite si chaque suite numérique $m_{ij}(n)$ a une limite, et on pose : $\lim M_n = (\lim m_{ij}(n))$. On admettra que les règles usuelles relatives aux limites de sommes et produits s'appliquent aux sommes et produits matriciels.

Tournez la page S.V.P.

Etant donnée une application : $t \mapsto M(t) = (m_{ij}(t))$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}$, on dit que M est de classe C^k (resp.C^∞) si chaque fonction m_{ij} est de classe C^k (resp. C^∞). La dérivée k-ième de M est alors définie par $M^{(k)}(t) = \left(m_{ij}{}^{(k)}(t)\right)$. On admettra que les règles de dérivation des sommes et produits s'appliquent aux sommes et produits matriciels.

Soit $M \in \mathcal{M}$. Si M est diagonalisable, toute expression de la forme $M = P\,D\,P^{-1}$ où P est un élément inversible de $\mathcal{M}$ et D une matrice diagonale, est appelée décomposition diagonale de M ; P est la matrice de passage, D la réduite diagonale.

On désigne enfin par A et B les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 3/2 \\ -2 & 1/2 & -3/2 \\ 2 & 1/2 & 5/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

I

1°) Déterminer les valeurs propres de A.
Préciser une décomposition diagonale de A : $A = P_0 D_0 P_0^{-1}$. (On classera les valeurs propres par ordre de valeurs croissantes et on choisira pour P_0 une matrice dont les vecteurs colonnes ont une première composante égale à 1).

2°) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Déterminer deux réels α_n et β_n tels que :

(1) $$D_0^{\,n} = \alpha_n D_0 + \beta_n D_0^{\,2}.$$

Que peut-on dire de A^n ?

3°) Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ engendré par la famille (A^n), $n \in \mathbb{N}$. (On rappelle que $A^0 = I$).
Déduire de ce qui précède la dimension de $\mathcal{P}$ en précisant une base de ce sous-espace.

II

On désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}$ telles que

$$A M - M A = 0 .$$

1°) Vérifier que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}$.
Quelle relation d'inclusion existe-t-il entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$?

2°) Soient λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé à λ.
Montrer que si $M \in \mathscr{C}$, X est un vecteur propre de M.
Que peut-on en conclure pour la matrice $P_0^{-1} M P_0$? (P_0 a été définie en I.1°).

3°) Déduire de ce qui précède la forme générale des éléments de $\mathscr{C}$.
Comparer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

4°) Utiliser ce qui précède pour déterminer toutes les matrices $M \in \mathscr{M}$ telles que $M^2 = A$. On donnera de chacune d'elles une décomposition diagonale et son expression explicite.

III

B étant la matrice définie dans le préambule et t étant un nombre réel, on définit les matrices :

$$(2) \qquad C_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} B^{2k} \qquad \text{(avec } B^0 = I) ,$$

$$(3) \qquad S_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} B^{2k+1} .$$

1°) Ecrire une décomposition diagonale de B.
En utilisant une décomposition diagonale de $C_n(t)$ et $S_n(t)$, montrer que les suites $(C_n(t))$ et $(S_n(t))$ ont, pour tout $t \in \mathbb{R}$, des limites que l'on notera respectivement C(t) et S(t) . Préciser une décomposition diagonale de C(t) et S(t) et expliciter ces deux matrices.

2°) Calculer $C(t)^2 + S(t)^2$.
Exprimer, pour t et u réels, C(t+u) et S(t+u) à l'aide de C(t), C(u), S(t) et S(u) .

Tournez la page S.V.P.

3°) Montrer que les applications : $t \mapsto C(t)$ et $t \mapsto S(t)$ sont de classe C^∞ et exprimer les dérivées $C'(t)$, $C''(t)$, $S'(t)$ et $S''(t)$ à l'aide des matrices $C(t)$, $S(t)$ et B .

4°) Soit Z un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $BZ = 0$. Calculer $C(t)Z$ et $S(t)Z$.

IV

On considère le système différentiel

(4) $$X'' + B^2X = 0$$

où X est une application inconnue, de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$.

1°) U et V étant deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, l'application

(5) $$X: t \mapsto C(t)U + S(t)V$$

est-elle une solution de (4) ?

2°) On choisit $U = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, et on désigne par Γ la courbe de $\mathbb{R}^3$ de représentation paramétrique : $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$.

Construire la projection de Γ sur le plan Oxy et sur le plan Oyz. Reconnaître la nature géométrique de ces projections.

3°) Soient $X_0 = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $X'_0 = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

La formule (5) permet-elle de déterminer une solution X de (4) vérifiant de plus :

$$X(0) = X_0 \quad \text{et} \quad X'(0) = X'_0 \ ?$$

On discutera éventuellement suivant les valeurs du vecteur X'_0.

o o

o

Options T et TA SESSION 1992

MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE : EXERCICES .

Durée: 4 heures.Aucun document n'est autorisé.Les quatre exercices sont indépendants .
Les candidats sont instamment priés de rédiger les exercices sur des copies séparées.

PREMIER EXERCICE

1)Soit t un nombre réel.

1-a) Soit la fonction f définie par les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} f \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ 2\pi - \textit{périodique} \ , \ \textit{impaire} \ , \\ \forall x \in]0, \pi[\ , \ f(x) = ch(tx) \ , \\ f(0) = f(\pi) = 0 \ . \end{cases}$$

Former la série de Fourier de f dans le cas $t = 0$ et dans le cas $t \neq 0$.

1-b) Etudier la convergence de cette série.

En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \ \frac{1}{ch(\frac{\pi}{2}t)} = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2 + t^2} \qquad (1)$$

2) Soit

$$g(y) = \int_0^{+\infty} \frac{cos(yx)}{ch(x)} dx$$

2-a) Quel est le domaine de définition de g ?

2-b) Etablir que

$$\forall x \geq 0 \ , \ \frac{1}{ch(x)} = 2 \sum_{p=0}^{n} (-1)^p e^{-(2p+1)x} + \frac{2(-1)^{n+1} e^{-(2n+3)x}}{1 + e^{-2x}}$$

2-c) En utilisant (1) exprimer g à l'aide de fonctions usuelles.

Tourner la page S.V.P.

DEUXIEME EXERCICE

Sauf en ce qui concerne les notations , les deux questions sont indépendantes.
a et b sont deux réels donnés , $a < b$.
E désigne l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose , pour f et g dans E :

$$\phi_1(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad et \quad \phi_2(f,g) = \phi_1(f',g')$$

où f' et g' sont les dérivées respectives de f et g.

1) 1-a) L'application ϕ_1 définit-elle un produit scalaire sur E ?
Même question pour ϕ_2 .
1-b) on pose $q_1(f) = \phi_1(f,f)$ et $q_2(f) = \phi_2(f,f)$.
n est un entier donné , $n > 1$.
Soit $I = \{1,2,\cdots,n\}$ et $\{f_i\}_{i\in I}$ une famille libre de n fonctions données de E.
r désigne la fonction de $\mathbb{R}^n\setminus\{(0,0,\cdots,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$r(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) = \frac{q_2(f)}{q_1(f)} \quad où \quad f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$$

Exprimer $r(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ en fonction des λ_i et des constantes $a_{ij} = \phi_1(f_i,f_j)$, $b_{ij} = \phi_2(f_i,f_j)$, $(i,j) \in I \times I$.
On suppose qu'il existe $(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$ tel que

$$\forall i \in I \ , \ \frac{\partial}{\partial\lambda_i} r(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n) = 0 \ .$$

On note $\rho = r(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$.
Montrer que ρ est racine d'un polynôme de degré n , déterminant d'une matrice que l'on exprimera à l'aide des matrices $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$, $(i,j) \in I \times I$.

2)Ici $[a,b] = [-1,1]$. On donne $P_1 = 1$.
Construire les polynômes P_2 , P_3 ,P_4 tels que :
$P_i = X^{i-1} + R_i$ avec degré de $R_i < i-1$,$i \in \{2,3,4\}$,
et que la famille $\{P_i\}_{i\in\{1,2,3,4\}}$ soit orthogonale pour ϕ_1.
Former les matrices A et B définies au 1-b) avec
$f_i = P_i$, $i \in \{1,2,3,4\}$.

Tourner la page S.V.P.

TROISIEME EXERCICE

R est un réel strictement positif donné.
On se place dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit S la surface définie par la représentation paramétrique $(\theta,\lambda) \in \mathbb{R}^2 \mapsto M(\theta,\lambda)$ de coordonnées x, y, z avec :

$$\begin{cases} x(\theta,\lambda) = (R + \lambda cos\frac{\theta}{2})cos\theta \\ y(\theta,\lambda) = (R + \lambda cos\frac{\theta}{2})sin\theta \\ z(\theta,\lambda) = \lambda sin(\frac{\theta}{2}) \end{cases}$$

$$(\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \ .$$

1)Par un point M de S passe-t-il une ou plusieurs droites contenue(s) dans S ?
Comparer les points $M(\theta + 2\pi, -\lambda)$ et $M(\theta,\lambda)$ ainsi que les vecteurs

$$\frac{\partial\vec{M}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda}(\theta + 2\pi, -\lambda) \quad et \quad \frac{\partial\vec{M}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda}(\theta,\lambda)$$

2) Soit (C) la courbe projection orthogonale sur le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$ de l'ensemble des points $M(\theta,R)$ où $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$, orientée dans le sens des θ croissants.

Etudier et représenter graphiquement (C).

Calculer la circulation le long de (C) du champ de vecteurs $\vec{V}$:

$$M \mapsto \vec{V}(M) = -y\vec{i} + x\vec{j} \ .$$

3)Pour les candidats de l'option T seulement :
(S_1) désigne la portion de (S) correspondant à $(\theta,\lambda) \in [0,\pi] \times [-R,R]$, orientée par le vecteur unitaire normal $\vec{n}$ continu tel que $\vec{n}.\vec{k} > 0$ en $M(0,0)$.

Calculer le flux à travers (S_1) du champ de vecteurs $\vec{W}$:

$$M \mapsto \vec{W}(M) = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k} \ .$$

Tourner la page S.V.P.

QUATRIEME EXERCICE

a est un réel strictement positif donné. Le plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit (C) une courbe de classe C^1 de ce plan , passant par O qui est choisi comme origine de l'abscisse curviligne s sur (C) . On note $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. s est le paramètre :

$$x \ : \ s \mapsto x(s) \ , \ y \ : \ s \mapsto y(s) \ , s \in [0,a]$$

On pose $b = y(a)$. On suppose que (C) est contenue dans le demi-plan $y \geq 0$ et que les fonctions x et$y$ sont croissantes. On pose $ds = f(y)dy$.
On fait l'hypothèse que f est continue sur $]0,b]$ et que l'intégrale $\int_0^b f(y)dy$ converge.
Soit

$$I(y_0) = \int_0^{y_0} \frac{f(y)dy}{\sqrt{y_0 - y_\theta}} \ , \ y_0 \in]0,b] \ .$$

1) L'intégrale $I(y_0)$ converge-t-elle ?
2) Ici (C) a pour équation $x = Rsin\theta$, $y = R(1 - cos\theta)$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
où R est un réel donné, $0 < R \leq b$.
(C) est orientée dans le sens des θ croissants . Tracer (C).
Soit $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $y_0 = y(\theta_0)$.
Exprimer $I(y_0)$ en fonction de

$$J(\theta_0) = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{cos\theta - cos\theta_0}} \ .$$

Calculer

$$\lim_{\theta_0 \to 0} J(\theta_0) \ .$$

(On pourra poser $t = tan(\frac{\theta}{2})$ et $t_0 = tan(\frac{\theta_0}{2})$)
3)Les hypothèses de 2) n'ont plus lieu.
Montrer que si la fonction $y \mapsto \sqrt{y}f(y)$ est constante , $I(y_0)$ ne dépend pas de y_0. Cette hypothèse est supposée réalisée dans la suite.
On note $\sqrt{2k}$ la constante $\sqrt{y}f(y)$. Calculer $y(s)$.
Désignant par ϕ l'angle de la tangente en $M(x,y)$ à (C) avec l'axe $(O;\vec{i})$, exprimer y en fonction de ϕ puis de $t = 2\phi$; faire de même pour x.
Etudier et représenter graphiquement (C).